第 47 講　総合問題(7)

1　x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 P が x 軸上を動くとき，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域を求め，図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．

(1)　P_{10} を求めよ．

(2)　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ．

(3)　P_n が最大となる n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 空間における3点 A(1, 1, −1), B(3, 2, 1), C(−1, 3, 0) を通る平面を α とする.

(1) △ABC は直角二等辺三角形であることを示せ.

(2) 原点 O から平面 α に垂線を下ろし，その交点を H とするとき，点 H の座標を求めよ.

(3) 四面体 OABC に外接する球の中心の座標を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　総合問題(7)

［1］　xy 平面上の 2 点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線 l_t の方程式は

$y=($ ア $t-1)x-$ イ t^2+ ウ t と表される．t が実数のとき，直線 l_t の通りうる範囲は，不等式 $y \leqq \dfrac{1}{\text{エ}}x^2+\dfrac{1}{\text{オ}}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合として表される．

［2］　座標空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ がある．原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ から三角形 ABC に下ろした垂線の足 H の座標を求めたい．H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{z}{\sqrt{\text{カ}}}(\sqrt{\text{カ}},\ 1,\ \sqrt{\text{カ}})$ と表せる．

よって $\vec{v}=(\sqrt{\text{カ}},\ 1,\ \sqrt{\text{カ}})$ とおくと，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$　……①

と表され，$\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ である．また H は平面 ABC 上の点であることより

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　……②　と表される．①と②より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

この式の両辺について $\vec{v}$ との内積をとることにより $k=\dfrac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$ である．

したがって H の座標は $\left(\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}},\ \dfrac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{コ}},\ \dfrac{\text{シ}}{\text{コ}}\right)$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　総合問題(7)

1　x 軸上の点 P$(t,\ 0)$ と y 軸上の点 Q$(0,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 P が x 軸上を動くとき，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域を求め，図示せよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線は，2 点 P，Q から等距離にある点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$(x-t)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$$

よって　$\boldsymbol{2tx-4y-t^2+4=0}$

(2)　$2tx-4y-t^2+4=0$　より　$t^2-2xt+4y-4=0$　……①

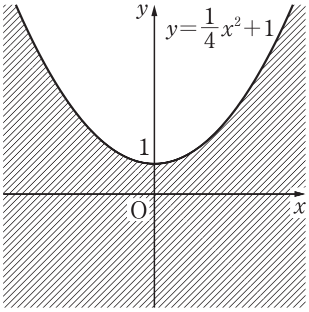
t の 2 次方程式①が実数解をもつような x，y の条件を求めればよい．

①の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=x^2-(4y-4)\geqq 0 \qquad y\leqq \frac{1}{4}x^2+1$$

これが求める領域を表す式である．

図示すると右図斜線部（境界含む）．



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．

(1)　P_{10} を求めよ．

(2)　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ．

(3)　P_n が最大となる n を求めよ．

(1)　$n=10$ のとき，赤球 6 個，白球 4 個.

この 10 個の球から取り出した 6 個の球のうち，3 個が赤球であるとき，白球は 3 個

赤球，白球のそれぞれの選び方は ${}_6C_3$ 通り，${}_4C_3$ 通りである.

よって　$$\boldsymbol{P_{10}}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_4C_3}{{}_{10}C_6}=\frac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot4}{\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boldsymbol{\frac{8}{21}}$$

(2)　赤球 6 個，白球 $(n-6)$ 個の中から，赤球 3 個，白球 3 個選ぶときを考えて

$$P_n=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{n-6}C_3}{{}_nC_6}\qquad よって\quad P_{n+1}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{(n+1)-6}C_3}{{}_{n+1}C_6}$$

したがって

$$\boldsymbol{\frac{P_{n+1}}{P_n}}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6}\cdot\frac{{}_nC_6}{{}_6C_3\cdot{}_{n-6}C_3}=\frac{\dfrac{(n-5)!}{3!(n-8)!}}{\dfrac{(n+1)!}{6!(n-5)!}}\cdot\frac{\dfrac{n!}{6!(n-6)!}}{\dfrac{(n-6)!}{3!(n-9)!}}$$

$$=\frac{(n-5)!}{3!(n-8)!}\cdot\frac{6!(n-5)!}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{6!(n-6)!}\cdot\frac{3!(n-9)!}{(n-6)!}$$

$$=\frac{(n-5)^2}{(n-8)(n+1)}=\boldsymbol{\frac{n^2-10n+25}{n^2-7n-8}}$$

(3)　$P_n<P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ となるのは

$\dfrac{n^2-10n+25}{n^2-7n-8}>1$　より　$n^2-10n+25>n^2-7n-8$

$n<11$　　つまり　$n\leqq10$ のとき

$P_n=P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$ となるのは　$n=11$ のとき

$P_n>P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ となるのは　$n>11$　つまり　$n\geqq12$ のとき

よって　$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12}>P_{13}>P_{14}>\cdots\cdots$　より　P_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n=11,\ 12}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 空間における3点 A$(1,\ 1,\ -1)$, B$(3,\ 2,\ 1)$, C$(-1,\ 3,\ 0)$ を通る平面を α とする.

(1) △ABC は直角二等辺三角形であることを示せ.

(2) 原点 O から平面 α に垂線を下ろし，その交点を H とするとき，点 H の座標を求めよ.

(3) 四面体 OABC に外接する球の中心の座標を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 1)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{4+1+4}=3$　　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4+4+1}=3$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-4+2+2=0$

よって，△ABC は ∠BAC$=90°$, AB$=$AC$=3$ の直角二等辺三角形である.

(2) H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$平面 α より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

よって　$2x+y+2z=0$, $-2x+2y+z=0$　より　$y=2x$, $z=-2x$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ 2x,\ -2x)=x(1,\ 2,\ -2)$　より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の方向ベクトルの1つが $\vec{v}=(1,\ 2,\ -2)$ であり

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{v}$　……①　　また　$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　……②

また，H は平面 α 上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されることから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……③

①, ③より　$x\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

この式の両辺について $\vec{v}$ との内積をとると

$x\vec{v}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{v}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{v}$

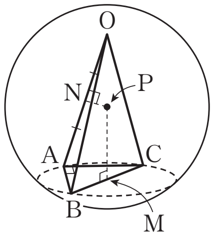
これと②より　$x|\vec{v}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{v}$　より　$x(1+4+4)=1+2+2$　　$x=\dfrac{5}{9}$

したがって　**H**$\left(\dfrac{5}{9},\ \dfrac{10}{9},\ -\dfrac{10}{9}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　求める球の中心をＰとし，Ｐから平面 α に下ろした垂線の足をＭとすると，



$\triangle$PAM$\equiv\triangle$PBM$\equiv\triangle$PCM より　AM＝BM＝CM

よってＭは $\triangle$ABC の外接円の中心である．

また(1)より $\triangle$ABC の外接円の中心は，辺 BC の中点である．よってＭの座標は $\left(1,\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=k\vec{v}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+k\vec{v}$ と表される．

また，Ｐから線分 OA に下ろした垂線の足は，OA の中点 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ である

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　$(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}-k\vec{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-k\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)-k(1+2+2)=0$　　$k=-\frac{3}{10}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}(1,\ 2,\ -2)=\left(\frac{7}{10},\ \frac{19}{10},\ \frac{11}{10}\right)$　より

$\mathbf{P}\left(\frac{7}{10},\ \frac{19}{10},\ \frac{11}{10}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 47 講　総合問題(7)

[1]　xy 平面上の 2 点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線 l_t の方程式は

$y=($ ア $t-1)x-$ イ t^2+ ウ t と表される．t が実数のとき，直線 l_t の通りうる範囲は，不等式 $y \leqq \dfrac{1}{\boxed{エ}}x^2+\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合として表される．

[2]　座標空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ がある．原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ から三角形 ABC に下ろした垂線の足 H の座標を求めたい．H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{z}{\sqrt{\boxed{カ}}}(\sqrt{\boxed{カ}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{カ}})$ と表せる．

よって $\vec{v}=(\sqrt{\boxed{カ}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{カ}})$ とおくと，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$　……①

と表され，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ である．また H は平面 ABC 上の点であることより

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　……②　と表される．①と②より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

この式の両辺について $\vec{v}$ との内積をとることにより $k=\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である．

したがって H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{コ}}\right)$ である．

解答例

[1]　$y=\dfrac{(1-t)-t}{(t-1)-t}(x-t)+t$　つまり　$l_t：y=(\mathbf{2}t-1)x-\mathbf{2}t^2+\mathbf{2}t$　……①

①を変形して　$2t^2-2(x+1)t+x+y=0$　この t の 2 次方程式が実数解をもつような x，y の条件を求めればよい．判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=\{-(x+1)\}^2-2(x+y)\geqq 0$　　　$y\leqq\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

よって求める領域を表す不等式は　$y\leqq\dfrac{1}{\mathbf{2}}x^2+\dfrac{1}{\mathbf{2}}$ である．

[2]　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ \sqrt{2},\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より　$x-z=0$ かつ $\sqrt{2}y-z=0$　　よって　$x=z,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(z,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}z,\ z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$

$\vec{v}=(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$ であり　$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\vec{v}$ との内積をとると　$k\vec{v}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{v}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\vec{v}$

つまり　$k|\vec{v}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}$　　$5k=\sqrt{2}$　　よって　$k=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{5}}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$ より H の座標は $\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{5},\ \dfrac{\mathbf{2}}{5}\right)$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。